Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Први разред - А категорија

1. Бинарна релација ϱ дефинисана је на следећи начин:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$$

(а) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна?
(б) Испитати да ли је ϱ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{R}$. Ако јесте, наћи класе еквиваленције елемената 0, 1, 2 и 6.
(в) Испитати да ли је ϱ релација поретка на скупу $\mathbb{R}$, као и да ли је релација тоталног на истом скупу.

2. Наћи све реалне бројеве r за које постоји тачно један реалан број a такав да полином $p(x) = (x + a)(x^2 + rx + 1)$ има све ненегативне коефицијенте.

3. Наћи све просте бројеве p, q и r такве да је број

$$p^{q+r} + q^{p+r} + r^{q+p}$$

квадрат непарног природног броја.

4. Нека је $k \geqslant 2$ природан број. Маргита је на табли написала првих $2k - 1$ природних бројева $1, 2, \ldots, 2k - 1$. У једном потезу она може да обрише произвољна два броја са табле и на истој напише збир и производ обрисаних бројева. Да ли је могуће да Маргита своје потезе одигра тако да на табли на крају остане тачно k појављивања броја n, где је $n \geqslant 2k + 1$ задат непаран природан број?

5. На страници BC троугла ABC уочена је тачка D. Тачке E и F, које су различите од тачке D, су изабране на правој BC тако да је $BE = BD$ и $CF = CD$. Кружнице описане око троуглова ACE и ABF секу се, по други пут, у тачки G. Означимо са H средиште кружнице описане око троугла EGF. Доказати да је средиште дужи DH уједно и средиште описане кружнице око троугла ABC.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Други разред - А категорија

1. Претпоставимо да постоји група људи за коју важи да сваки појединац из те групе има тачно 3 пријатеља међу осталим члановима те групе. Познато је да сваке две особе које се не познају имају тачно једног заједничког пријатеља из групе. Колико највише људи може имати поменута група?

2. Дата је квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$, где је коефицијент a природан број, а коефицијенти b и c су цели бројеви. Ако функција f има две различите нуле у интервалу $(0, 1)$, доказати да тада мора бити $a \geqslant 5$. Дати пример такве функције за коју је $a = 5$.

3. Нека су AB и CD две различите тетиве кружнице $k = k(O, R)$, које немају заједничку тачку, при чему је O средиште и $R > 0$ полупречник кружнице k. Мањи лукови AB и CD, пресликани су осносиметрично, редом, у односу на тетиве AB и CD. Испоставило се да се слике тих лукова након поменутог пресликавања додирују. Доказати да је $AB^2 + CD^2 > 4R^2$.

4. Наћи све парове целих бројева $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за које важи $2024^x + 1 = y^2$.

5. На табли је написан природан број $n > 1$. Ана и Бобан играју следећу игру, при чему Ана игра прва и оба играча потезе вуку наизменично. У сваком потезу играч који је на потезу бира делилац броја написаног на табли, који је већи од 1 и који није дељив квадратом неког природног броја већег од 1. Затим, број са табле подели одабраним делиоцем, на табли запише резултат, а стари број обрише са табле. Када на табли остане број 1, играч који је на потезу је изгубио. У зависности од броја n одредити ко од играча има победничку стратегију.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Трећи разред - А категорија

1. У магични квадрат (суме бројева по врстама, по колонама и по обе дијагонале су једнаке) димензија 3×3 записано је девет различитих целих бројева. Нека је S сума свих тих бројева и нека је D вредност детерминанте матрице 3×3, која има исте елементе као и задати магични квадрат. Доказати да је број $D : S$ цео, за $S \neq 0$.

2. На табли је у почетку записан полином $P(x) = x^{2024} + x^{2023} + x^{2022} + ... + x + 1$. Аца и Бранко, наизменично, бришу један сабирак из полинома који се тог тренутка налази на табли. Игру губи играч након чијег потеза се на табли налази полином који има барем једну реалну нулу. Уколико су избрисани сви сабирци, тада сматрамо да је на табли написан нула полином. Ако Аца игра први, који од играча има победничку стратегију?

3. На страници BC троугла ABC уочена је тачка D. Тачке E и F су изабране на правој BC тако да је $BE = BD$ и $CF = CD$. Кружнице описане око троуглова ACE и ABF секу се, по други пут, у тачки G. Нека кружница описана око троугла AEF сече праву AD, поново, у тачки H. Доказати да је $DG = GH$.

4. Квадратна табла странице n, $n \geqslant 2$, подељена је на n^2 јединичних поља. Обојено је $2n - 3$ поља табле, али тако да ниједна врста нити колона нису потпуно обојене. Доказати да је могуће изабрати n необојених поља, таквих да никоја два од њих нису у истој врсти или колони.

5. Низ (a_n), $n \in \mathbb{N}$, задат је са $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Одредити остатак при дељењу броја a_{2024} са 2024.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Четврти разред - А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да важи $f(a) + f(b) \mid af(a) - b^2$, за било која два природна броја a и b.

2. Одредити све тројке $(a, b, c) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ природних бројева за које важи $10^a+2^b = 2024^c$.

3. Нека су x и y реални бројеви за које важи $\sin x+\cos x = y$ и $\sin y+\cos y = x$. Доказати да је $x > \frac{5}{4}$.

4. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је D тачка на правој BC. Симетрала спољашњег угла у темену A тог троугла сече праву BC у тачки E. Означимо са M средиште описане кружнице око троугла ADE, а са ω_1 и ω_2 кружнице описане око троуглова ABD и ACD. Доказати да се заједничке тангенте кружница ω_1 и ω_2 секу у тачки M.

5. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. На планети ДМС2024 обитава тачно n становника, матичних бројева $1, 2, \ldots, n$, међу којима се неки познају, а неки не. Услед постојања паралелних универзума, постоји и планета ДМС2024', чији становници имају матичне бројеве $1', 2', \ldots, n'$ и где су познанства супротна, односно за произвољне $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, становници i' и j' са ДМС2024' су познаници ако и само ако i и j са ДМС2024 то нису. Притом за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, становник i планете ДМС2024 познаје становника i' и само њега од становника планете ДМС2024'. За које вредности n је могуће да су познанства међу становницима обеју планета таква да се они сви могу распоредити за округли сто и то на тај начин да свако седи између својих познаника? Познанства су симетрична.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Први разред - Б категорија

1. Да ли постоји троугао чије су тежшне дужи дужина 1, 2 и 3?

2. Колико има шестоцифрених природних бројева који у свом запису имају барем једну парну цифру и тачно једну јединицу?

3. За природне бројеве a, b и c важи $\{a, b, c\} = \{2, 3, 2024\}$. Колико највише целобројних решења (по непознатој x) може имати неједначина

$$||x - c| - b| < a?$$

4. Претпоставимо да су a и b рационални бројеви такви да су бројеви $a + b$ и $a^2 + b^2$ цели. Доказати да су бројеви a и b, такође, цели.

5. Нека је $ABCD$ правоугаоник страница $AB = 4$ и $BC = 3$. Права која садржи тачку A и нормална је на дијагоналу BD датог правоугаоника сече праву BD у тачки H. Означимо са M средиште дужи BH, а са N средиште дужи CD. Изразити вектор $\overrightarrow{MN}$ у зависности од вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Други разред - Б категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра p тако да једначина $|x^2-px-2p+1| = p-1$ има 4 реална и различита решења x_1, x_2, x_3 и x_4, за која важи $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20$.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{x+2023} + \sqrt[3]{x+2024} + \sqrt[3]{x+2025} = 0.$$

3. У троуглу ABC важи $\sphericalangle CAB = 2\sphericalangle BCA$ и $2\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA$. Симетрала унутрашњег угла у темену C тог троугла сече праву AB у тачки E. Нека је F средиште дужи AE и нека је AD висина из темена A троугла ABC. Ако симетрала дужи DF сече праву AC у тачки M, доказати да је $AM = CM$.

4. Одредити све тројке целих бројева $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ за које важи $x^y - 2^z = 1$.

5. На табли је записан низ нула и јединица. Познато је да међу сваких 200 узастопних чланова низа се налази једнако нула и јединица, али међу сваких 202 узастопних чланова низа број нула и јединица није једнак. Колико највише чланова може имати овај низ?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Трећи разред - Б категорија

1. У зависности од реалног параметра $a \in (-\pi, \pi)$ дискутовати и решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} x + \cos a \cdot y + z &= 1 \\ x + y + \cos a \cdot z &= 1 \\ x + \cos^2 a \cdot y + z &= \cos a. \end{aligned}$$

2. Нека је $a = \log_2 5$ и $b = \log_{14} 98$. Доказати да је

$$\log_{28} 490 = \frac{2a + b - ab}{3 - b}.$$

3. Нека су a и b произвољни природни бројеви. Одредити најмању могућу вредност израза $I(a, b) = |20^a - 23^b|$.

4. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је ивица дужине 1. Тачка K на ивици AB дате коцке изабрана је тако да је угао између праве A_1B и равни B_1CK једнак 60°.

(а) Одредити запремину пирамиде $KBCB_1$.
(б) Одредити $\mathrm{tg}\alpha$, где је α угао који заклапају равни B_1CK и ABC.

5. Посматрајмо 5 међусобно различитих целих бројева и апсолутне разлике свих 10 парова тих бројева (наравно, неке од ових разлика могу бити међусобно једнаке). Одредити највећи природан број за који са сигурношћу можемо тврдити да ће делити производ ових разлика, без обзира на то којих смо 5 бројева на почетку посматрали.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

2. март 2024.

Четврти разред - Б категорија

1. Познато је да полином $P(x) = x^4 - x^3 + px^2 + qx + r$, са реалним коефицијентима, има нуле $x_1 = 3$ и $x_2 = 1 + 2i$. Одредити коефицијенте p, q и r тог полинома, као и све остале његове нуле.

2. За које природне бројеве n, који имају тачно девет природних делилаца, можемо попунити магични квадрат димензија 3×3 са логаритмима њихових делилаца (код магичног квардрата збирови бројева у свакој врсти, у свакој колони, као и на дијагоналама су једнаки)?

3. Новак Ђоковић (Србија) и Роџер Федерер (Швајцарска) су једини играчи у опен ери који имају преко 60 победа на сва четири гренд слем турнира. Играли су укупно 50 пута, а Ђоковић води са 27 : 23 (плус, предаја Федерера у финалу завршног мастерса 2014. године). У једном од најпознатијих њихових мечева, у полуфиналу турнира УС Опен-2010, Ђоковић је добио са 3:2 у сетовима, тј. у гемовима 5:7, 6:1, 5:7, 6:2, 7:5. На колико различитих начина, у складу са правилима тениса, су могли да дођу до истог овог резултата по гемовима? Ако је N добијени број начина, колико целобројних делилаца има број N?

4. Нека је k кружница полупречника $R > 0$ и A тачка у равни кружнице k, која је од њеног центра на растојању једнаком $2R$. На кружници k уочене су различите тачке B и C, такве да је $AB = AC$. Доказати да је површина троугла ABC не већа од $\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt[4]{12}}{4}R^2$.

5. Дат је троугао ABC. Нека је O средиште описане кружнице k троугла ABC, а S тачка на симетрали странице AB тог троугла. Ако су C и T пресечне тачке кружнице k и праве симетричне правој CS у односу на симетралу угла ACB, доказати да тачке C, O, S и T леже на једној кружници.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.